Chapitre 18

Espaces vectoriels

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS

1) Définition

Définition 18.1

Soit E *un ensemble non vide, on dit que* E *est un* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel (ou* $\mathbb{K}$*-e.v.) lorsque* E *possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée « . », c'est une application :* $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$*), avec les propriétés suivantes :*

– $(E,+)$ *est un groupe abélien (l'élément neutre est noté* 0_E *ou* $\overrightarrow{0_E}$ *et appelé* ***vecteur nul*** *de* E*).*

– *La loi . (ou produit par les scalaires) doit vérifier :* $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \forall\ x,y\in E$ *:*
  - $1.x = x$
  - $\lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$
  - $(\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$
  - $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $(E,+,.)$ *est un* $\mathbb{K}$ *- e.v., les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés* ***les scalaires*** *et les éléments de* E *sont appelés* ***vecteurs*** *(parfois notés avec une flèche).*

2) Exemples de référence

☞**Exemples** :

- Un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement si $\mathbb{K}$ est corps inclus dans un autre corps $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes :

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \text{ et } \lambda.(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n),$$

  est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul est le n-uplet : $(0,\ldots,0)$.
- Si I est un ensemble non vide, alors l'ensemble des applications de I vers $\mathbb{K}$: $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, pour les opérations usuelles (addition de deux fonctions et produit par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant l'application nulle. En particulier $(\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v., ainsi que l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des applications de I vers E : $\mathscr{F}(I,E)$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $(\mathbb{K}[X],+,.)$, $(\mathbb{K}(X),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Espace produit : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., on définit sur $E\times F$ l'addition : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$, et un produit par les scalaires : $\lambda.(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y)$. On peut vérifier alors que $(E\times F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant $(0_E,0_F)$. Cela se généralise au produit cartésien d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-e.v.

3) Règles de calculs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

- $\forall\ \vec{x}\in E, 0.\vec{x}=\vec{0}$, et $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{0}=\vec{0}$.
- $\forall\ \vec{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, -(\lambda.\vec{x})=(-\lambda).\vec{x}=\lambda.(-\vec{x})$.
- $\forall\ \vec{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{x}=\vec{0} \implies \lambda=0 \text{ ou } \vec{x}=\vec{0}$.

4) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

Définition 18.2

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et soit* H *un ensemble, on dit que* H *est un sous-espace vectoriel de* E *(ou s.e.v de* E*) lorsque :*
- $H\subset E$, $H\neq\varnothing$.
- $\forall\ x,y\in H, x+y\in H$ *(*H *est stable pour l'addition).*
- $\forall\ x\in H, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.x\in H$ *(*H *est stable pour la loi .).*

Si c'est le cas, alors il est facile de vérifier que $(H,+,.)$ *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

☞**Exemples** :

- $\mathscr{L}(E,F)$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(E,F)$.
- L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires, bornées, T-périodiques, lipschitziennes) définies sur $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- L'ensemble $(\mathscr{C}^n(I,\mathbb{C}),+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I,\mathbb{C}),+,.)$.
- L'ensemble $(\mathbb{K}_n[X],+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X],+,.)$.
- L'ensemble des suites complexes de limite nulle et un s.e.v de l'espace des suites complexes convergentes, qui est lui-même un s.e.v de l'espace de suites complexes bornées, qui est lui-même un s.e.v de l'espace des suites complexes.
- Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3\ /\ ax+by+cz=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$.

Théorème 18.1 (intersection de sous-espaces vectoriels)
Soit $(\mathrm{H}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de s.e.v de* E *(*I *est un ensemble d'indices), alors* $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{H}_i$ *est un s.e.v de* E.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

II APPLICATIONS LINÉAIRES

1) Définition, noyau

Définition 18.3
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-e.v. et soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application, on dit que* f *est une application linéaire (ou morphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels), lorsque :*

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E}, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

Si de plus, f *est bijective, alors on dit que* f *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). L'ensemble des applications linéaires de* E *vers* F *est noté* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Remarque 18.1 – *Les applications linéaires de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *sont les applications de la forme* $f(x) = ax$ $(a \in \mathbb{K})$, *car* $f(x) = xf(1)$.

☞**Exemples** :
- L'application nulle (notée 0) de E vers F est linéaire.
- L'application identité de E : $\mathrm{id}_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $\mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = x$, est linéaire bijective (et $(\mathrm{id}_\mathrm{E})^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$).
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ : $h_\lambda : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, définie par $h_\lambda(x) = \lambda.x$, est linéaire et bijective. Sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/\lambda$. L'ensemble des homothéties de E est un groupe pour la loi $\circ$ car c'est un sous-groupe du groupe des permutations de E.
- L'application $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x, y) = (x; -y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur lui-même.

À retenir
$f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ alors $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$ et $\forall x \in \mathrm{E}$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 18.4 (vocabulaire)
- *Une application linéaire de* E *vers* E *est appelée un endomorphisme de* E. *L'ensemble des endomorphismes de* E *est noté* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *(on a donc* $\mathscr{L}(\mathrm{E}) = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$*).*
- *Un isomorphisme de* E *vers* E *est appelé un automorphisme de* E. *L'ensemble des automorphismes de* E *est noté* GL(E) *et appelé groupe linéaire de* E.
- *Une application linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$ *est appelée une forme linéaire sur* E. *L'ensemble des formes linéaires sur* E *est noté* E^* *et appelé dual de* E *(on a donc* $\mathrm{E}^* = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$*).*

☞**Exemples** :
- $\mathrm{id}_\mathrm{E} \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.
- Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $\phi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$, alors ϕ est une forme linéaire sur E.
- Soit $\mathrm{E} = \{u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \;/\; (u_n) \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. et l'application $\phi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(u) = \lim u_n$, est une forme linéaire sur E.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, l'application $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x, y, z) = ax + by + cz$, est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$. En exercice, montrer la réciproque, c'est à dire que toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ sont de ce type.

Définition 18.5 (Noyau d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *on appelle noyau de* f *l'ensemble noté* $\ker(f)$ *et défini par :*

$$\ker(f) = \left\{x \in \mathrm{E} \;/\; f(x) = 0_\mathrm{F}\right\}$$

Le noyau de f *contient toujours* 0_E.

☞**Exemples** :

- Le noyau d'une application linéaire bijective est $\{0_E\}$.
- Le noyau de l'application linéaire $d : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[x]$ définie par $d(P) = P'$ est $\ker(d) = \mathbb{K}$.
- Le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y - z)$ est $\ker(f) = \{(x, 2x, -3x) \ / \ x \in \mathbb{K}\}$.

2) Propriétés

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
- La composée de deux applications linéaires est linéaire. On en déduit que GL(E) est stable pour la loi $\circ$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. On en déduit que GL(E) est stable par symétrisation, *i.e.* si $f \in GL(E)$, alors $f^{-1} \in GL(E)$.
- $(GL(E), \circ)$ est un groupe (non abélien en général), c'est en fait un sous-groupe du groupe des permutations de E : $(S_E, \circ)$.
- Si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$ et $\lambda.f$ sont linéaires. On en déduit que $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (s.e.v. de $\mathscr{F}(E, F)$).
- $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, la loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication.

Remarque 18.2 –

- *En général, l'anneau $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif. Le groupe des inversibles de cet anneau est* GL(E).
- *La loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication, on adopte les notations usuelles des anneaux pour les puissances, i.e. si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si n est entier, alors :*

$$u^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } n = 0 \\ u \circ \cdots \circ u & n \text{ fois si } n > 0 \\ u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1} & -n \text{ fois si } u \text{ est inversible et } n < 0 \end{cases},$$

de plus si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors on peut utiliser le binôme de Newton :

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

- *Soit $E = \mathbb{K}^2$ et $f : (x; y) \mapsto (y; 0)$, on vérifie facilement que $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $f^2 = 0$ (application nulle), pourtant $f \neq 0$. Cet exemple montre qu'en général $\mathscr{L}(E)$ n'est pas un anneau intègre.*

3) S.e.v. et applications linéaires

Théorème 18.2 (noyau et image d'une application linéaire)
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\ker(f)$ est un s.e.v de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de F.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

À retenir
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un isomorphisme si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

Théorème 18.3 (image d'un s.e.v par une application linéaire)
Soit H un s.e.v de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(H)$ (ensemble des images par f des éléments de H) est un s.e.v de F.

Preuve : Il suffit de considérer la restriction de f à H : $g : H \to F$ définie par $\forall\, x \in H, g(x) = f(x)$, il est clair que g est linéaire et que $f(H) = \mathrm{Im}(g)$, on peut appliquer alors le théorème précédent. □

Théorème 18.4 (image réciproque d'un s.e.v par une application linéaire)
Soit H un s.e.v de F et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f^{-1}(H)$ (ensemble des antécédents des éléments de H par f) est un s.e.v de E.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples :

- $H = \{f \in \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R}) \;/\; \int_0^b f = 0\}$ est un s.e.v de $\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : f \mapsto \int_0^b f$.
- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; ax+by+cz = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : (x,y,z) \mapsto ax+by+cz$.
- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; 2x+y-z = 0$ et $3x-2z = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est l'intersection des noyaux des deux formes linéaires : $\phi_1 : (x,y,z) \mapsto 2x+y-z$ et $\phi_2 : (x,y,z) \mapsto 3x-2z$.

Théorème 18.5

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ u = 0 \iff \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Définition 18.6 (hyperplan)

Soit H un s.e.v de E, on dit que H est un hyperplan de E lorsqu'il existe une forme linéaire ϕ sur E, non identiquement nulle, telle que $H = \ker(\phi)$.

III S.E.V. D'UN ESPACE VECTORIEL

1) Sous-espace engendré

Définition 18.7 (combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, tout vecteur x de E pour lequel il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est noté $\mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$.
Deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires lorsque l'un des deux est combinaison linéaire de l'autre, i.e. $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Théorème 18.6 (sous-espace engendré)

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, $\mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$ est un s.e.v de E. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de E qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par $(x_1,\dots,x_n)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples :

- $\mathrm{Vect}[0_E] = \{0_E\}$.
- Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\mathrm{Vect}[x] = \{\lambda x \;/\; \lambda \in \mathbb{K}\}$, c'est un s.e.v de E appelé droite vectorielle engendrée par x. On dit que x est un vecteur directeur de cette droite. Les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme λx avec $\lambda \neq 0$.
- Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls, si les deux vecteurs sont colinéaires, alors $\mathrm{Vect}\left[x,y\right] = \mathrm{Vect}[x] = \mathrm{Vect}\left[y\right]$ (droite vectorielle). Si ces deux vecteurs sont non colinéaires, alors :

$$\mathrm{Vect}\left[x,y\right] = \left\{\alpha x + \beta y \;/\; \alpha,\beta \in \mathbb{K}\right\}$$

  c'est un s.e.v de E, on l'appelle plan vectoriel engendré par x et y, il contient (strictement) les deux droites engendrées par x et y.
- Dans $\mathbb{K}^3$ déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par les vecteurs $x = (1,1,1)$ et $y = (0,-1,1)$.

Remarque 18.3 – *Un s.e.v. de E est stable par combinaisons linéaires.*

Théorème 18.7 (image d'une combinaison linéaire par une application linéaire)

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v et soit* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de vecteurs de* E*. Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*, alors l'image par* f *d'une combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une combinaison linéaire de la famille* $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ *(dans* F*) avec les mêmes coefficients.*

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n=1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons le théorème vrai au rang n, et soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}$, f étant linéaire, on peut écrire $f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + \lambda_{n+1}.f(x_{n+1})$, on applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure. □

☞**Exemples** :

- Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ on pose $e_i = (\delta_{i,1},\ldots,\delta_{i,n})$, on a alors $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,[e_1,\ldots,e_n]$.
- Soit $\mathrm{H} = \{u \in \mathbb{K}^3 \ / \ \exists\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K}, u = (\alpha-\beta, 2\alpha-2\beta+\gamma, -\alpha+\beta+2\gamma)\}$. Posons $e_1 = (1,2,-1)$, $e_2 = (-1,-2,1)$ et $e_3 = (0,1,2)$, on a alors $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\,[e_1,e_2,e_3]$, ce qui prouve que H est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$. On remarque que $e_2 = -e_1$, donc finalement $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\,[e_1,e_3]$, et comme e_1 et e_3 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.
- Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les deux fonctions $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et 1 sont non colinéaires, donc elles engendrent un plan vectoriel dans E : $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}\,[\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, 1]$. $f \in \mathrm{P}$ équivaut à $\exists\, a,b \in \mathbb{R}, f = a.\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + b.1$, et donc $f : x \mapsto ax+b$, P est donc l'ensemble des applications affines.

2) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 18.8 (somme de s.e.v)

Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, on appelle somme de* F *et* G *l'ensemble noté* $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *et défini par :*

$$\mathrm{F}+\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} \ / \ \exists\, u \in \mathrm{F}, v \in \mathrm{G}, x = u+v\}.$$

Théorème 18.8

Une somme de s.e.v de E *est un s.e.v de* E*.*

Preuve : $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est inclus dans E et contient le vecteur nul puisque celui-ci est dans F et dans G. Si x et y sont dans $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ alors on peut écrire $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$ et $y = y_{\mathrm{F}} + y_{\mathrm{G}}$ avec $x_{\mathrm{F}}, y_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{X}_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$, on a $x+y = (x_{\mathrm{F}}+y_{\mathrm{F}}) + (x_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{G}})$ et $\lambda x = \lambda x_{\mathrm{F}} + \lambda x_{\mathrm{G}}$, comme F et G sont stables pour l'addition et le produit par les scalaires, on voit que $x+y$ et λx sont dans $\mathrm{F}+\mathrm{G}$. □

Remarque 18.4 – $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *est un s.e.v. de* E *qui contient à la fois* F *et* G*.*

☞**Exemples** :

- Dans $\mathbb{K}^3$, posons $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$, on peut vérifier que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Vect}\,[i] + \mathrm{Vect}\,[j,k] = \mathrm{Vect}\,[i,j] + \mathrm{Vect}\,[k] = \mathrm{Vect}\,[i,k] + \mathrm{Vect}\,[j]$.
- Soient $x, y \in \mathrm{E}$ deux vecteurs, on a $\mathrm{Vect}\,[x] + \mathrm{Vect}\,[y] = \mathrm{Vect}\,[x,y]$. Plus généralement, on peut remplacer x et y par deux familles de vecteurs de E.

3) Sommes directes

Définition 18.9 (somme directe)

Soient F, G *deux s.e.v de* E*, on dit que la somme* $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *est directe lorsque tout vecteur* x *de cette somme s'écrit* ***de manière unique*** *sous la forme* $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$ *avec* $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$*, et* $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$*. Si c'est le cas, la somme est notée* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$*.*

Théorème 18.9 (caractérisation des sommes directes)

Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) la somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *est directe.*

b) $\forall\, (x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}$*, si* $x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}} = 0_{\mathrm{E}}$ *alors* $x_{\mathrm{F}} = x_{\mathrm{G}} = 0_{\mathrm{E}}$*.*

c) $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$*.*

d) l'application linéaire $\phi : \mathrm{F}\times\mathrm{G} \to \mathrm{E}$ *définie par* $\phi(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}}) = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$ *est injective.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

☞**Exemples** :
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont en somme directe.
- Dans $\mathbb{K}^3$ le plan P d'équation $x+y+z=0$ et la droite engendrée par le vecteur $i=(1,1,1)$ sont en somme directe, mais P n'est pas en somme directe avec le plan P′ engendré par i et $j=(1,-1,1)$.

4) S.e.v. supplémentaires

Définition 18.10 (s.e.v supplémentaires)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E *, on dit que* F *et* G *sont supplémentaires lorsque* $F\oplus G=E$. *Ce qui signifie que* $E=F+G$ *et la somme* $F+G$ *est directe, ou encore : tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G.

☞**Exemples** :
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont supplémentaires.
- Dans $E=\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ le s.e.v $H=\{f\in E\ /\ \int_a^b f=0\}$ et le s.e.v $G=\mathrm{Vect}\,[\mathrm{id}_{\mathbb{R}}]$ sont supplémentaires.

Théorème 18.10 (caractérisations des hyperplans)
Soit H *un s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est un hyperplan de* E *(i.e. le noyau d'une forme linéaire sur* E *non nulle).*

b) $\forall\ x_0\in E\setminus H, H\oplus\mathrm{Vect}\,[x_0]=E$.

c) $\exists\ x_0\in E\setminus H$ *tel que* $H\oplus\mathrm{Vect}\,[x_0]=E$.

Preuve : Montrons que *a)* $\Longrightarrow$ *b)* : soit $x_0\in E\setminus H$, comme x_0 n'est pas dans H, il est facile de voir que H et $\mathrm{Vect}\,[x_0]$ sont en somme directe. Soit ϕ une forme linéaire (non nulle) telle que $\ker(\phi)=H$, on a $\phi(x_0)=\alpha\neq 0$, soit $x\in E$ et $\lambda=\phi(x)$, posons $y=x-\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, on a $\phi(y)=0$, donc $y\in H$ et de plus $x=y+\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, ce qui prouve que $E=H+\mathrm{Vect}\,[x_0]$.

Montrons que *b)* $\Longrightarrow$ *c)* : rien à faire.

Montrons que *c)* $\Longrightarrow$ *a)* : Pour $x\in E$, il existe $y\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, **uniques** tels que $x=y+\lambda x_0$. Posons $\phi(x)=\lambda$. On définit ainsi une application non nulle de E vers $\mathbb{K}$, on peut vérifier ensuite que ϕ est bien linéaire (laissé en exercice), $x\in\ker(\phi)\iff\lambda=0\iff x=y\iff x\in H$, donc $\ker(\phi)=H$, ce qui prouve que H est un hyperplan. □

IV PROJECTIONS, SYMÉTRIES

1) Projecteurs

Définition 18.11
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, une projection dans* E *(ou un projecteur de* E*) est un endomorphisme* p *de* E *tel que* $p^2=p$ *(i.e.* $p\circ p=p$*).*

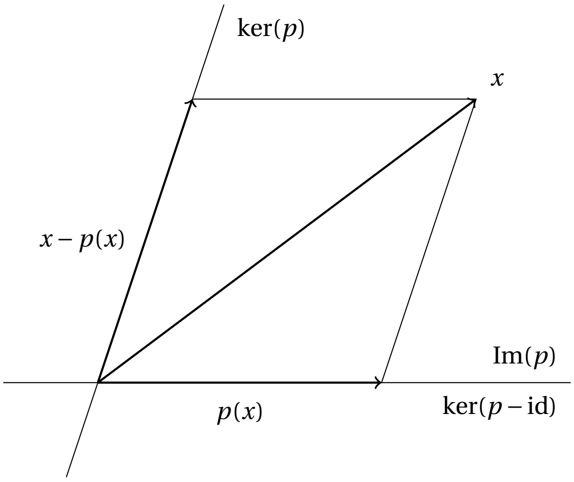
☞**Exemples** :
- $E=\mathbb{K}^2$ et $p(x,y)=(x,0)$.
- $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et p qui à $f\in E$ associe $p(f):x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Remarque 18.5 – *Invariants d'un endomorphisme : si* $f\in\mathscr{L}(E)$*, alors* $x\in E$ *est invariant par* f *(ou un point fixe de* f*) si et seulement si* $f(x)=x$*, ce qui équivaut à* $(f-\mathrm{id}_E)(x)=0_E$*, ou encore* $x\in\ker(f-\mathrm{id}_E)$*. L'ensemble des points fixes de* f *est donc le s.e.v* $\ker(f-\mathrm{id}_E)$.

Théorème 18.11 (caractérisation des projections)
$p\in\mathscr{L}(E)$ *est un projecteur* $\iff E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$*. Si c'est le cas, alors* $\mathrm{Im}(p)=\ker(p-\mathrm{id}_E)$ *et on dit que* p *est la projection sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$*. Tout vecteur* x *de* E *se décompose de la manière suivante :* $x=(x-p(x))+p(x)$*, avec* $x-p(x)\in\ker(p)$ *et* $p(x)\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$.

Preuve : Si p est un projecteur, soit $x\in\ker(p)\cap\ker(p-\mathrm{id}_E)$, alors $p(x)=0_E=x$, donc la somme est directe. Soit $x\in E$, alors $p(x-p(x))=p(x)-p^2(x)=0_E$, donc $x-p(x)\in\ker(p)$, on a alors $x=(x-p(x))+p(x)$ et $p(x)\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$, donc $E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$. De la définition, il découle que $\mathrm{Im}(p)\subset\ker(p-\mathrm{id}_E)$, l'inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Im}(p)=\ker(p-id_E)$.

Réciproque : si $E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$, soit $x\in E$, alors $x=y+z$ avec $y\in\ker(p)$ et $z\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$, d'où $p(x)=p(y)+p(z)=p(z)=z$, et donc $p^2(x)=p(z)=z=p(x)$, ce qui prouve que p est un projecteur. □



☞**Exemples** :
- Dans le premier exemple, p est la projection sur la droite $\text{Vect}\,[(1,0)]$ et parallèlement à la droite $\text{Vect}\,[(0,1)]$.
- Dans le deuxième exemple, p est la projection sur le s.e.v des fonctions paires, parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

Théorème 18.12 (projection associée à une décomposition)
Si F et G sont deux s.e.v de E supplémentaires ($\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), alors il existe une unique projection p telle que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{F}$ et $\ker(p) = \mathrm{G}$, i.e. qui soit la projection sur F parallèlement à G.

Preuve : Pour $x \in \mathrm{E}$, il existe $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$, **uniques** tels que $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$, on pose alors $p(x) = x_{\mathrm{F}}$, ce qui définit une application de E dans E. On vérifie facilement que p est linéaire, et comme $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$, on a par définition même de p, que $p^2(x) = x_{\mathrm{F}} = p(x)$, donc p est bien un projecteur. On a $p(x) = 0_{\mathrm{E}} \iff x_{\mathrm{F}} = 0_{\mathrm{E}} \iff x = x_{\mathrm{G}} \iff x \in \mathrm{G}$, donc $\ker(p) = \mathrm{G}$, d'autre part, $p(x) = x \iff x = x_{\mathrm{F}} \iff x \in \mathrm{F}$, donc $\ker(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{F}$, ce qui termine la preuve. □

★**Exercice 18.1**

1/ *Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^3$, $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathrm{E} \ / \ z = 0\}$ et $\mathrm{G} = \text{Vect}\,[(1,1,1)]$. Montrer que F et G sont supplémentaires, et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G.*

2/ *Soit p un projecteur de E, montrer que $q = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p$ est un projecteur, préciser ses éléments caractéristiques.*

2) Symétries

Définition 18.12
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, une symétrie de E est un endomorphisme s tel que $s^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ (involution linéaire).

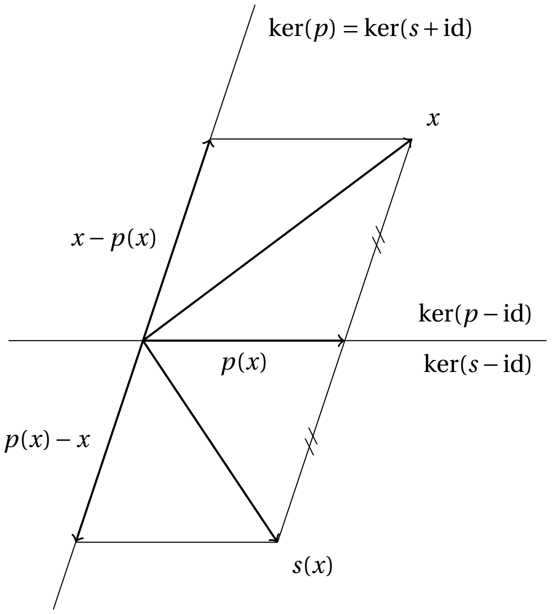
☞**Exemples** :
- Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^2$, l'application s définie par $s(x,y) = (y,x)$ est une symétrie.
- Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application s définie par $s(f)$ est la fonction qui à $s(f) : x \mapsto f(-x)$, est une symétrie.

Théorème 18.13 (caractérisation des symétries)
Soit $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, s est une symétrie $\iff \mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. Ce qui revient à dire que l'application $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + s)$ est une projection. Si c'est le cas, on dit que s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ (ensemble des invariants) et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, et on dit que p est la projection associée à s. Tout vecteur x de E se décompose de la manière suivante :

$$x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)),$$

avec $\frac{1}{2}(x + s(x)) \in \ker(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ et $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in \ker(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Preuve : Posons $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + s)$, s est une symétrie équivaut à $s^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, c'est à dire $(2p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, ou encore $p^2 = p$, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, et donc $\mathrm{E} = \ker(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. □



Théorème 18.14 (symétrie associée à une décomposition)
Si F et G sont deux s.e.v de E supplémentaires ($E = F \oplus G$), alors il existe une unique symétrie s telle que $\ker(s - \mathrm{id}_E) = F$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E) = G$, i.e. qui soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Preuve : Soit p la projection sur F parallèlement à G, posons $s = 2p - \mathrm{id}_E$, on sait alors que s est une symétrie et $\ker(s - \mathrm{id}_E) = \ker(p - \mathrm{id}_E) = F$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E) = \ker(p) = G$, donc s existe. Réciproquement, si s existe, alors la projection associée est nécessairement la projection sur F parallèlement à G, or celle-ci est unique, c'est p, donc s est unique. □

☞**Exemples** :
- Dans le premier exemple ci-dessus, s est la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}[(1,1)]$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}[(1,-1)]$.
- Dans le deuxième exemple, s est la symétrie par rapport au s.e.v des fonctions paires, et parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

V GÉNÉRALISATION

1) Sous espace engendré

Définition 18.13 (généralisation)
*Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille, tout vecteur de E pouvant s'écrire comme combinaison linéaire d'un **nombre fini** de vecteurs de la famille. Notation :*

$$\mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in I}] = \left\{\textstyle\sum_{j\in J} \alpha_j x_j \ /\ J \text{ partie finie de } I \text{ et } \forall j \in J, \alpha_j \in \mathbb{K}\right\}.$$

Remarque 18.6 – *Si X est une partie de E, on notera $\mathrm{Vect}[X]$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X. On peut écrire :*

$$\mathrm{Vect}[X] = \left\{\sum_{x\in X} \alpha_x x \ /\ (\alpha_x)_{x\in X} \text{ est une famille de scalaires tous nuls sauf un nombre fini}\right\}.$$

*De telles familles de scalaires sont appelées **familles à support fini**. Le théorème 18.7 se généralise alors ainsi :*

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ alors } f\Big(\sum_{x\in X} \alpha_x x\Big) = \sum_{x\in X} \alpha_x f(x), \text{ pour toute famille de scalaires } (\alpha_x)_{x\in X} \text{ à support fini.}}$$

Théorème 18.15 (sous-espace engendré)
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, $\mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$ est un s.e.v de E. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de E qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par $(x_i)_{i\in I}$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

☞**Exemple** : $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}[(X^n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

2) Sommes de s.e.v.

Définition 18.14 (somme de s.e.v)
Si $F_1, \ldots, F_p$ *sont des s.e.v. de* E*, la somme de ces s.e.v. est :*
$$F_1 + \cdots + F_p = \{x \in E \;/\; \exists\, u_1 \in F_1, \ldots, u_p \in F_p, x = u_1 + \cdots + u_p\}.$$

Théorème 18.16
Une somme de s.e.v de E *est un s.e.v de* E.

Preuve : $F_1, \ldots, F_p$ sont des s.e.v de E, donc ce sont en particulier des $\mathbb{K}$-e.v, par conséquent le produit cartésien $F_1 \times \cdots \times F_p$ est lui-même un $\mathbb{K}$-e.v. On considère alors l'application $f : F_1 \times \cdots \times F_p \to E$ définie par $f(u_1, \ldots, u_p) = u_1 + \cdots + u_p$. On vérifie facilement que f est linéaire, il est clair d'après la définition que $F_1 + \cdots + F_p = \mathrm{Im}(f)$, et donc c'est un s.e.v de E. □

☞**Exemple** : $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Vect}\,[(1,0,0)] + \mathrm{Vect}\,[(0,1,0)] + \mathrm{Vect}\,[(0,0,1)]$.

Définition 18.15 (somme directe)
Soient $F_1, \ldots, F_p$ *des s.e.v de* E*, on dit que la somme* $F_1 + \cdots + F_p$ *est directe lorsque tout vecteur de cette somme s'écrit* ***de manière unique*** *sous la forme* $u_1 + \cdots + u_p$ *avec* $u_i \in F_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$*. Si c'est le cas, la somme est notée* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Théorème 18.17 (caractérisation des sommes directes)
Soient $F_1, \ldots, F_p$ *des s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) la somme $F_1 + \cdots + F_p$ *est directe.*

b) $\forall\, (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$*, si* $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ *alors* $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.

c) $\forall\, i \in [\![1;p]\!]$*, l'intersection entre* F_i *et* ***la somme des autres s.e.v.*** *est réduite à* $\{0_E\}$.

d) l'application linéaire $\phi : F_1 \times \cdots \times F_p \to E$ *définie par* $\phi(x_1, \ldots, x_p) = x_1 + \cdots + x_p$ *est injective.*

Preuve : Montrons *a)* $\implies$ *b)* : soient $x_i \in F_i$ tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E$, alors $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} 0_E$, or 0_E est dans chaque F_i, l'unicité permet de conclure que $x_i = 0_E$.

Montrons que *b)* $\implies$ *c)* : soient $x_1 \in F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_p)$ alors il existe $x_2 \in F_2, \ldots, x_p \in F_p$ tels que $x_1 = x_2 + \cdots + x_p$, alors $x_1 - x_2 - \cdots - x_p = 0_E$ avec $-x_i \in F_i$, et donc chacun de ces vecteurs est nul, en particulier x_1. Le raisonnement est le même si on permute les indices.

Montrons *c)* $\implies$ *d)* : si $(x_1, \ldots, x_p) \in \ker(\phi)$ alors $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ et donc $x_1 = -x_2 - \cdots - x_p$, or ce vecteur est dans $F_2 + \cdots + F_p$, donc $x_1 = 0_E$, le même façon on montre que les autres sont nuls et donc que ϕ est injective.

Montrons que *d)* $\implies$ *a)* : Si $x_1 + \cdots + x_p = y_1 + \cdots + y_p$ avec $x_i, y_i \in F_i$, alors $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_p - y_p) = 0_E$, donc $(x_1 - y_1, \ldots, x_p - y_p) \in \ker(\phi)$ (car $x_i - y_i \in F_i$), ϕ étant injective il vient que $x_i - y_i = 0_E$ d'où l'unicité de la décomposition, la somme est donc directe. □

Attention !
Si $F_i \cap F_j = \{0_E\}$*, pour* $i \neq j$ *dans* $[\![1;p]\!]$*, cela ne prouve pas que la somme* $F_1 + \cdots + F_p$ *est directe. Par exemple, soit* $F_1 = \mathrm{Vect}\,[(1,0,0)]$, $F_2 = \mathrm{Vect}\,[(0,1,0)]$ *et* $F_3 = \mathrm{Vect}\,[(1,1,0)]$*, alors* $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$*, mais la somme* $F_1 + F_2 + F_3$ *n'est pas directe puisque* $F_1 + F_2 = F_3$.

☞**Exemple** : $\mathbb{K}[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$ avec $F_i = \mathrm{Vect}\left[(X^{3n+i})_{n \in \mathbb{N}}\right]$, $i \in [\![0;2]\!]$.

VI SOLUTION DES EXERCICES

Solution 18.1

1/ *Soit* $(x,y,z) \in E$*, alors* $(x,y,z) = (z,z,z) + (x-z, y-z, 0)$*, le premier triplet est dans* G*, et le second dans* F*, donc* $E = G + F$*. Si* $(x,y,z) \in F \cap G$ *alors* $x = y = z$ *et* $z = 0$ *donc* $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ *d'où* $E = F \oplus G$ *et le projeté de* (x,y,z) *sur* F *parallèlement à* G *est* $p(x,y,z) = (x-z, x-z, 0)$ *(composante sur* F *dans la décomposition).*

2/ *On sait que* p *est la projection sur* $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ *et parallèlement à* $G = \ker(p)$*, on a* $E = F \oplus G$ *et pour tout* x *de* E, $x = p(x) + x - p(x)$ *avec* $x - p(x) \in G$ *et* $p(x) \in F$*, donc par définition,* $x - p(x)$ *est le projeté de* x *sur* G *parallèlement à* F*, autrement dit,* $q = \mathrm{id}_E - p$ *est la projection sur* G *parallèlement à* F.